

МЕТОДЫ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ
METHODS, MODELS AND TECHNOLOGIES

УДК 556.16

DOI: 10.34753/HS.2021.3.3.233

ГЕОСТАТИСТИЧЕСКОЕ
ОПИСАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СНЕЖНОГО
ПОКРОВА В ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
СНЕГОТАЯНИЯ НА РЕЧНОМ
ВОДОСБОРЕ

А.Н. Гельфан

*Институт водных проблем РАН, г. Москва,
Россия; Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
Россия
hydrowpi@iwp.ru*

GEOSTATISTICAL DESCRIPTION
OF SNOW COVER
HETEROGENEITY IN A
PHYSICALLY BASED
CATCHMENT-SCALE SNOW
MODEL

Alexander N. Gelfan

*Institute for Water Problems, Russian Academy of
Sciences, Moscow, Russia;
Lomonosov Moscow State University, Moscow,
Russia
hydrowpi@iwp.ru*

Аннотация. Разработан метод геостатистического описания пространственной неоднородности залегания снежного покрова при расчете снеготаяния с помощью физико-математической модели формирования снежного покрова (на примере водосбора реки Сейм). Средняя высота снежного покрова на площади расчетной сетки модели задается по данным наблюдений на метеорологических станциях региона с использованием для интерполяции метода стандартного крайгинга. Проведенный ранее анализ многолетних данных снегомерных наблюдений в Центрально-Черноземном регионе показал, что эмпирическая структурная функция высоты снежного покрова может быть аппроксимирована степенной зависимостью от расстояния между пунктами наблюдений. Это позволило получить на основе метода геостатистической регуляризации простую зависимость изменчивости высоты снежного покрова внутри каждой ячейки сетки (подсеточной изменчивости) от отношения размера ячейки к размеру водосбора. С помощью модели формирования снежного покрова оценена чувствительность рассчитанной

Abstract. A method has been developed for geostatistical description of the spatial heterogeneity of snow cover when calculating snow melting using a physically based snow model over the catchment scale (by the example of the catchment area of the Seim River). The average snow depth within the computational grid cell is set according to snow observations at meteorological stations in the region using the ordinary kriging interpolation. An earlier analysis of long-term snow observation data in the Central Black Soil region showed that the empirical variogram of the snow depth can be approximated by a power-law dependence on the distance between the observation points. This made it possible to obtain, based on the method of geostatistical regularization, a simple dependence of the variability of the snow cover depth within each grid cell (subgrid variability) on the ratio of the cell size to the catchment size. Using the model of snow cover formation, the sensitivity of the calculated intensity of snow melting in the catchment area to the detail of the computational grid resolution was estimated. It is shown that the calculated snowmelt both in the entire catchment and within the cells turned out to be almost insensitive to changes in the spatial grid

интенсивности снеготаяния на площади водосбора к детальности дискретизации этой площади. Территория, расположенная в Центрально-Черноземной области России и включающая бассейн реки Сейм, разбивалась прямоугольной сеткой тремя способами с размерами ячеек порядка 800, 200 и 50 км². Показано, что рассчитанное снеготаяние на всем водосборе реки Сейм и на отдельных его участках оказалось малочувствительно к изменению плотности пространственной сетки, то есть расчет снеготаяния по грубой сетке с более высокой подсеточной изменчивостью глубины снега мало отличается от расчета по детальной сетке, но с меньшей подсеточной изменчивостью. Сделан вывод, что учет подсеточной изменчивости компенсирует погрешности, вызванные недостаточной детальностью сетки. Для расчетов гидрографа талого стока в замыкающем створе полученный результат означает возможность выбора, при описании снеготаяния, более грубой сетки, чем схематизация водосборной площади, используемая для расчетов склонового стока в моделях с распределенными параметрами.

Ключевые слова: снеготаяние; речной водосбор; пространственное распределение; физико-математическая модель; геостатистика; подсеточная изменчивость.

Введение

Отличия в характере залегания снега на разных частях водосборной площади в начале весны влияют в значительной степени на динамику снеготаяния и формирование весеннего половодья. При необходимости задания в физико-математической модели в качестве начальных условий предвесеннего распределения снега по водосборной площади возникает проблема, связанная с недостаточной плотностью имеющейся сети наблюдений, которая обычно менее детальна, чем схематизация водосбора, используемая в модели (например до сокращения сети Гидрометслужбы, произошедшей после 1990-х годов, средняя площадь, приходившаяся на один снегомерный пункт УГМС Центральной

resolution For calculating the hydrograph of snowmelt runoff in the river outlet, the result obtained means the possibility of choosing, when describing snow melting, a coarser grid than the schematization of the catchment area used for calculating overland runoff in physically based distributed models.

Keywords: snow melting; river catchment; spatial distribution; physically based model; geostatistics; subgrid variability.

и Центрально-Черноземной областей бывшего СССР – территорий с наиболее развитой в то время сетью наблюдений, – составляла более 1 000 км²). Возникает проблема переноса информации от имеющейся сети наблюдений к принятой схематизации водосборной площади.

Проблемы описания гидрометеорологических переменных или характеристик водосбора на пространственных масштабах, меньших характерных расстояний между имеющимися пунктами измерений этих величин, решаются методами объективного анализа. В западной литературе эти подходы объединены понятием скейлинга, понимаемого в широком смысле как совокупность методов передачи информации (содержащейся в

фактических данных или в модели) от одних пространственно-временных масштабов к другим [Blöschl, Sivapalan, 1995]. Принято разделять методы скейлинга на детерминистические и стохастические [Blöschl, Grayson, 2000].

Детерминистические методы скейлинга включают методы интерполяции, большинство из которых основаны только на имеющихся наблюдениях без учета какой-либо дополнительной информации о характере изучаемой пространственной переменной и могут применяться для любой переменной, независимо от природы и особенностей последней. При описании неоднородности снежного покрова в моделях талого стока чаще всего применяется метод Тиссена, заключающийся в разбиении пространства измерений на области (полигоны), тяготеющие к точкам измерений, причем внутри каждого полигона значение переменной считается равным измеренному в соответствующей точке. Более реалистичная пространственная картина снежного покрова может быть получена по имеющимся данным измерений с использованием других способов детерминистической интерполяции: линейной, весовой, полиномиальной и сплайновой [Чемеренко, 1971]. В работе [Meijerink et al., 1994] полиномиальная интерполяция признается наиболее эффективной при большом числе точек измерений. Вместе с тем, по данным [Чемеренко, 1971], точность полиномиальной интерполяции высоты снежного покрова невысока даже при относительно густой сети наблюдений. В работе [Blöschl, Grayson, 2000] указывается на ограниченность методов детерминистической интерполяции для масштабов, намного меньших характерных расстояний между пунктами измерений; эти методы приводят к существенному сглаживанию пространственных вариаций изучаемой переменной.

Стохастические методы скейлинга основаны на анализе стохастической структуры поля изучаемой переменной и свободны в значительной мере от недостатков, свойственных детерминистическим подходам. Исследования стохастической структуры поля снежного покрова для долгосрочного прогнозирования

объема половодья, основанные на методах объективного анализа, в нашей стране начаты Е.П. Чемеренко [Чемеренко, 1968; Чемеренко, 1971; Чемеренко, 1973]. Ранее методы объективного анализа применялись для оценки точности осреднения высоты снежного покрова и рационализации снегомерной сети в работах [Лайхтман, Каган, 1960; Гандин, Каган, 1962]. За рубежом стохастический подход к скейлингу получил широкое распространение в геофизических исследованиях после работы [Матерон, 1968], заложившей основы геостатистики. Методические вопросы применения геостатистики в гидрологических задачах и, в частности, к исследованию снежного покрова рассмотрены в работах [Blöschl, Sivapalan, 1995; Blöschl, Kirnbauer, 1992].

В настоящей статье рассмотрено применение геостатистических методов для оценки характеристик снежного покрова в узлах заданной расчетной сетки и изменчивости этих характеристик внутри ячеек сетки (подсеточной изменчивости) при физико-математическом моделировании снеготаяния на речном водосборе (на примере водосбора реки Сейм).

Методы

Согласно геостатистической теории собственных схем [Матерон, 1968], точечная пространственная переменная $S=S(x)$ (x – пространственная координата) рассматривается как реализация случайной функции со стационарными (однородными и изотропными) приращениями

$$\varepsilon(x, x+h) = [S(x) - S(x+h)] = \varepsilon(h),$$

то есть распределение вероятности приращений $\varepsilon(h)$ зависит только от расстояния h между точками, но не зависит от их взаимного расположения. (Величины S могут представлять собой, например, поле снегозапасов, коэффициента фильтрации почвы и так далее). При этом априори не накладывается ограничений на вероятностные законы распределения величин S . Из стационарности приращений следует, что для любой пары точек дисперсия приращений также зависит только от расстояния между этими точками.

Функция

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \sigma^2 [\varepsilon(h)] \quad (1)$$

где $\sigma^2[\]$ – дисперсия;

называется структурной функцией и характеризует корреляционную структуру поля пространственных переменных.

Структурная функция (полувариограмма в зарубежной литературе) играет ключевую роль в геостатистических исследованиях.

Для построения эмпирической структурной функции $\gamma^*(h)$ по имеющимся измерениям $S_i=S(x_i)$ в точках x_i определяются расстояния между всеми парами точек, и диапазон полученных расстояний разбивается на интервалы, после чего значения $\gamma^*(\bar{h})$ рассчитываются по формуле

$$\gamma^*(\bar{h}) = \frac{1}{2N(\bar{h})} \sum_{i=1}^{N(\bar{h})} [S(x_i + h) - S(x_i)]^2 \quad (2)$$

где $N(\bar{h})$ – число пар точек, попавших в интервал со средним расстоянием \bar{h} .

Наиболее распространенные методы интерполяции пространственной переменной, основанные на использовании структурной функции – методы оптимальной интерполяции, позволяющие воспроизвести поле изучаемой переменной наилучшим в определенном смысле образом, сохранив его вероятностные свойства.

При оптимальной интерполяции оценка $S^*(x_0)$ пространственной переменной $S(x_0)$ в некоторой точке поля x_0 ищется в виде линейной комбинации значений переменной в имеющихся N точках измерений $S(x_i)$ ($i=1,2,\dots,N$), как

$$S^*(x_0) = \sum_{i=1}^N \vartheta_i S(x_i) \quad (3)$$

Из условия несмещенности оценки $S^*(x_0)$ и минимума дисперсии погрешностей

$[S^*(x_0) - S(x_0)]$ следует, что веса ϑ_i могут быть найдены путем решения матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1N} & 1 \\ \gamma_{21} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{2N} & 1 \\ \gamma_{31} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{3N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \gamma_{N3} & \dots & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vdots \\ \vartheta_N \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \gamma_{03} \\ \vdots \\ \gamma_{0N} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

где $\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j)$ – значение структурной функции для расстояния между точками i и j ;

μ – множитель Лагранжа.

В геостатистике рассмотренная процедура оптимальной интерполяции называется стандартным крайгингом (ordinary kriging). (Другие геостатистические методы интерполяции в применении к гидрологическим задачам описаны например в обзоре [Georgakakos et al., 1990]). В теории объективного анализа аналогичная процедура называется оптимальной интерполяцией с нормировкой весов и впервые применялась для интерполяции характеристик снежного покрова в задачах прогноза талого стока в работе [Чемеренко, 1971] (заметим, что при оптимальной интерполяции с нормировкой весов используется корреляционная функция, которая для однородного изотропного поля однозначно связана со структурной).

В работе [Чемеренко, 1971] точность оптимальной интерполяции с нормировкой весов сравнивалась с некоторыми из перечисленных выше детерминистических способов интерполяции на основе данных о высоте снежного покрова на 700 станциях, расположенных на Европейской части территории бывшего СССР. Автор показал, что оптимальная интерполяция дает более точные оценки по сравнению с детерминистическими методами интерполяции. Процедура стандартного крайгинга применялась также в работе [Шутов, 1994] для интерполяции данных о снеготалых на водосборах Валдайской возвышенности. Значения снеготалых в точках измерений, приведенные к некоторой постоянной высоте, интерполировались в узлы регулярной сетки, а затем в полученные интерполированные значения вводилась поправка на высоту местности. Показано, что эта поправка позволяет

существенно улучшить точность оптимальной интерполяции. Аналогичное заключение об улучшении результатов стохастической интерполяции с учетом связи снегозапасов с высотой и уклонами местности сделано ранее в работе [Blöschl et al., 1991].

Несмотря на преимущества метода оптимальной интерполяции в сравнении с детерминистическими методами, он не решает проблему описания мелкомасштабной изменчивости, а именно: для масштабов, намного меньших характерного расстояния между пунктами измерений, поле получается слишком сглаженным [Journel, Huijbregts, 1978]. В тех ситуациях, когда требуется получить представление о подсеточной изменчивости, проблема скейлинга может быть решена геостатистическими методами регуляризации, обоснованными в работе [Матерон, 1968] и детально разработанными для прикладных геофизических исследований в работе [Journel, Huijbregts, 1978]. Суть методов регуляризации состоит в оценке изменений вероятностных характеристик (обычно первых статистических моментов) переменной на площади при изменении размеров последней. Другими словами, при регуляризации осуществляется скейлинг, например дисперсии переменной, а не восстанавливаются отсутствующие измерения в конкретных точках, как это делается при интерполяции.

Дисперсия точечной переменной $S(x)$ внутри некоторой площади F определяется по формуле

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{F} \int_F [S(x) - m_F]^2 dx \quad (5)$$

где m_F – среднее значение $S(x)$ по площади F , равное

$$m_F = \frac{1}{F} \int_F S(x) dx \quad (6)$$

Для поля со стационарными приращениями дисперсия точечной переменной внутри площади F не зависит от среднего значения переменной на

этой площади и может быть определена через структурную функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \frac{1}{F} \int_F [S(x) - m_F]^2 dx = \\ &= \frac{1}{F^2} \iint_F \gamma(x_i - x_j) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (7)$$

где x_i и x_j – координаты произвольной пары точек внутри площади F .

Из (7), задаваясь видом структурной функции, можно получить зависимость дисперсии точечной переменной от размеров и формы рассматриваемой площади. Для случайных полей разной структуры (степенной, экспоненциальной, логарифмической и других), такие зависимости приведены например в работах [Матерон, 1968; Journel, Huijbregts, 1978; Каган, 1979].

В случае степенной структурной функции (1), выражаемой как

$$\gamma \sim h^\alpha \quad (0 < \alpha < 2) \quad (8)$$

дисперсия точечной переменной внутри прямоугольного участка площадью $F = a \times b$ ($a \geq b$) равна [Матерон, 1968]:

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1+\alpha}{2}\right)}{(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{b^{1+\alpha}}{a} + \\ &+ \frac{4}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \frac{b^{2+\alpha}}{a^2} + a^\alpha * \\ &* \left[\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2}{6(\alpha-1)} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\alpha}{2} - k + 2\right)}{(\alpha+1-2k)(2k+1)!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Бесконечный ряд в выражении (9) быстро сходится: как показали наши расчеты, уже при $k > 5$ уточнение дисперсии становится меньше 0,01%.

Записав выражение (9) для двух подобных прямоугольников со сторонами A, B и a, b , при условии

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{F}{f}}$$

где F и f – соответствующие площади,

и поделив одно выражение на другое, путем простых алгебраических преобразований получим, что отношение дисперсий σ_F^2 и σ_f^2 внутри этих прямоугольников выражается через отношение соответственных площадей следующим образом:

$$\frac{\sigma_F^2}{\sigma_f^2} = \left(\frac{F}{f}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (10)$$

Таким образом, если эмпирическая структурная функция некоторой переменной, измерения которой имеются на территории площадью F , близка к степенной (8), то соотношение (10) позволяет, оценив дисперсию σ_F^2 этой переменной и показатель степени α структурной функции, рассчитать дисперсию σ_f^2 на части этой территории площадью f . И наоборот: оценив, по имеющимся измерениям, вариацию искомой переменной на части площади, по (10) можно рассчитать ее вариацию на всей площади. Естественно, приведенное соотношение (10) «работает» лишь в том диапазоне пространственных масштабов, для которого может считаться постоянной величина α , определяемая по углу наклона эмпирической структурной функции (2), построенной в логарифмических осях. В геостатистической теории случайных полей с однородными приращениями предполагается, что либо показатель α структурной функции поля остается постоянным для любых масштабов, либо на всех масштабах сохраняется только степенной характер структурной функции, а показатель α зависит от масштаба. Для однородных случайных полей со степенной структурой, рассматриваемых в теории объективного анализа, показатель α остается постоянным до расстояния, равного радиусу корреляции; это расстояние ограничивает диапазон пространственных масштабов, для которого может выполняться соотношение (10). Таким образом очевидно, что решение вопроса о возможности применения соотношения (10) для расчета вариации характеристик снежного покрова для некоторого диапазона пространственных масштабов (например от линейного размера подсеточных областей до размера водосбора) должно

опираться на анализ поведения структурной функции этих характеристик в выбранном диапазоне (для широкого диапазона масштабов такой анализ приведен в работе [Kuchment, Gelfan, 2001]).

В работах [Кучмент, Гельфан, 1997; Kuchment, Gelfan, 2001] формула (10) была получена другим способом – как следствие гипотезы самоподобия поля пространственной переменной.

Бенуа Мандельброт [Mandelbrot, 1982] показал, что случайное поле со степенной структурной функцией (8) является стохастическим фракталом. Количественной характеристикой фрактальной поверхности, определяющей соотношение между крупно- и мелкомасштабными вариациями, служит фрактальная размерность D_2 . Для двумерной поверхности эта величина всегда больше 2 (топологической размерности) и меньше 3 (размерности пространственного белого шума). Если $D_2 < 2,5$, то характеристики случайного поля проявляют персистентность – сохранение имеющейся тенденции изменения при относительно малом шуме; приращения $\varepsilon(h)$ при этом оказываются положительно коррелированными. Если $D_2 > 2,5$, то приращения отрицательно коррелированы, и преобладают мелкомасштабные вариации величин – тенденции не сохраняются (антиперсистентность).

Фрактальная размерность D_2 может быть определена по фрактальной размерности D_1 любого сечения поверхности по формуле [Mandelbrot, 1982]:

$$D_2 = D_1 + 1 \quad (11)$$

Фрактальная размерность D_1 сечения случайной поверхности может быть определена по показателю степени структурной функции α , как:

$$D_1 = 2 - \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

Последнее соотношение использовалось для оценки фрактальной размерности почвенных характеристик [Burrough, 1983], рельефа [Mark, Aronson, 1984]. Согласно работе [Bruno, Raspa, 1989] если поверхность является фракталом, то

использование соотношения (12) дает более устойчивые оценки по сравнению с другими способами определения фрактальной размерности. Заметим, что приведенные соотношения верны для случая, когда случайное поле является простым фракталом, то есть показатель α остается постоянным для всего рассматриваемого диапазона пространственных масштабов. Поля с переменной величиной α , зависящей от масштаба, получили название мультифракталы (например в работе [Lovejoy, Mandelbrot, 1985] как мультифрактал рассматривается поле осадков).

В следующем разделе показаны возможности геостатистических методов стандартного крайгинга и регуляризации для учета распределения высоты снежного покрова при описании неоднородности снеготаяния на водосборе реки Сейм с помощью физико-математической модели снежного покрова, разработанной Ю.Г. Мотовиловым [Мотовилов, 1999]. Эта модель ранее использовалась нами в качестве блока физико-математических моделей формирования талого стока на речных водосборах, расположенных в разных природных условиях: лесостепь и юг лесной зоны [Kuchment, Gelfan, 2002], тундровые и таежные водосборы зоны вечной мерзлоты [Кучмент, Гельфан, Демидов, 2000]. При проведении данного исследования использовались параметры модели, подобранные ранее по снегомерным измерениям в бассейне реки Сейм и приведенные в статье [Kuchment, Gelfan, 2002].

Результаты и обсуждение

На основании проведенного анализа данных снегомерных наблюдений в разных регионах бывшего СССР в работах [Kuchment, Gelfan, 2001; Гельфан, Морейдо, 2015] сделан вывод, что структурные функции высоты снежного покрова и снегозапасов на линейных

масштабах десятки и сотни метров (масштаб снегомерных маршрутов), а также десятки километров (речные водосборы), могут быть удовлетворительно описаны степенными зависимостями. Аналогичный вывод для разных масштабов содержится также в работах [Blöschl, Kirnbauer, 1992; Rozenhal and Dozier, 1996; Shook and Gray, 1996; Cline, Bales, Dozier, 1998].

В качестве подтверждения полученного вывода на рисунке 1 приведена эмпирическая структурная функция $\gamma^*(h)$ наблюдаемых значений высоты снежного покрова H_S на 1 марта, построенная нами по данным наблюдений на 30 метеорологических станциях Центрально-Черноземной области России и осредненная за 10 лет (с 1967 по 1976 год). Площадь района расположения станций – 31 000 км²; большей частью эти станции расположены в бассейнах рек Сосна и Сейм.

Для расчета величин $\gamma^*(h)$ по формуле (2) диапазон расстояний между 30 пунктами наблюдений (метеорологическими станциями) разбивался на 10 интервалов (середины интервалов от 8 до 142 км), в каждый из которых попало в среднем по 44 значения. Из рисунка 1 видно, что $\gamma^*(h)$ удовлетворительно описывается степенной зависимостью с показателем степени $\alpha=0,28$. Фрактальная размерность D_2 поля значений H_S , определенная по формулам (11) – (12) равна 2,86, что свидетельствует о преобладании мелкомасштабной составляющей в пространственных изменениях глубины снега на рассматриваемой территории.

Из 30 станций, использовавшихся для построения $\gamma^*(h)$, были отобраны 12, расположенных на водосборе реки Сейм (до замыкающего створа в деревне Рышково) или в непосредственной близости от границ водосбора. Расположение отобранных станций показано на рисунке 2а.

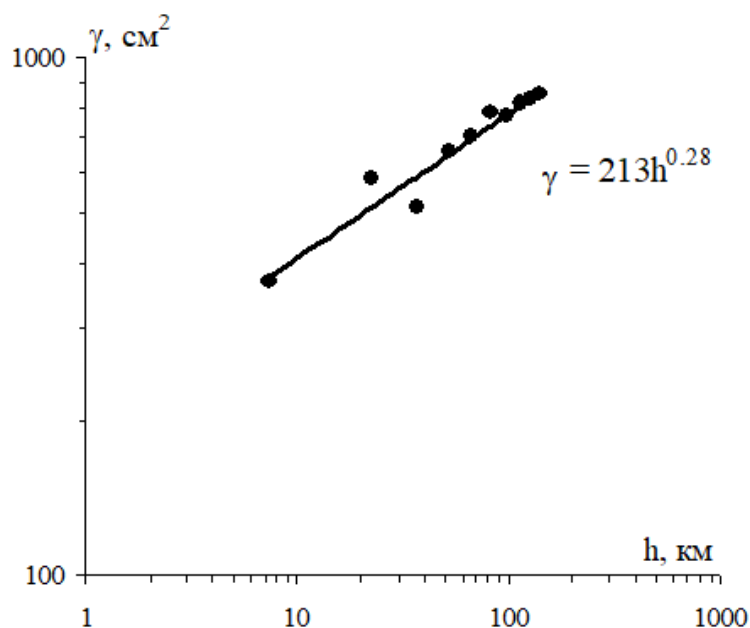


Рисунок 1. Структурная функция высоты снежного покрова, построенная по многолетним данным снегомерных измерений в Центрально-Черноземной области России и аппроксимированная степенной зависимостью.

Figure 1. Spatial semi-variogram of snow depth observed for the long-term period over the Central Black Soil Region (line is the fitted power function).

Физико-математическая модель формирования снежного покрова и снеготаяния [Мотовилов, 1999] в сочетании с рассмотренными выше геостатистическими методами использовалась для описания пространственной изменчивости процессов снеготаяния на водосборе реки Сейм, обусловленной неоднородностью залегания снежного покрова перед началом таяния. Применялась следующая процедура:

Территория, показанная на рисунке 2, разбивалась прямоугольной сеткой. Высота снежного покрова H_S , измеренная в 12 пунктах наблюдений на дату начала расчетов (принятую 1 марта для каждого года из 10 лет наблюдений), интерполировалась в центры ячеек сетки, попадающих на рассматриваемый водосбор, методом стандартного крайгинга. Рассчитанные таким образом величины считались равными средней высоте снежного покрова m_i для каждой i -й ячейки. Принималось, что вариограмма величин H_S на водосборе реки Сейм может быть описана степенной функцией (рисунок 1) с показателем $\alpha=0,28$. Отсюда, согласно формуле (10), стандартное отклонение (σ_i) величин H_S внутри i -й ячейки площадью f_i рассчитывается по

стандартному отклонению (σ_F) этих величин на всей площади водосбора с помощью зависимости

$$\sigma_i = \left(\frac{f_i}{F}\right)^{0,07} \sigma_F \quad (13)$$

Величина σ_F на площади водосбора оценивается по имеющимся данным.

Далее предполагалось, что высота снежного покрова внутри каждой i -й ячейки подчиняется логнормальному закону, параметры которого вычисляются по значениям m_i и σ_i , задаваемым описанным способом. Согласно экспериментальным данным, логнормальное распределение хорошо описывает изменения высоты снежного покрова для площадей порядка десятков и сотен квадратных километров (например [Gottshalk and Jutman, 1979; Killingtveit and Sand, 1991; Pomeroy, Gray, 1995]). Таким образом, по средней на площади ячейки высоте снежного покрова H_S (задается крайгинг-интерполяцией данных измерений на дату начала расчетов) и подсеточной изменчивости этой величины (рассчитывается по формуле (13)), строится начальное распределение вероятности высоты снежного покрова для каждой ячейки выбранной сетки на дату начала расчетов.

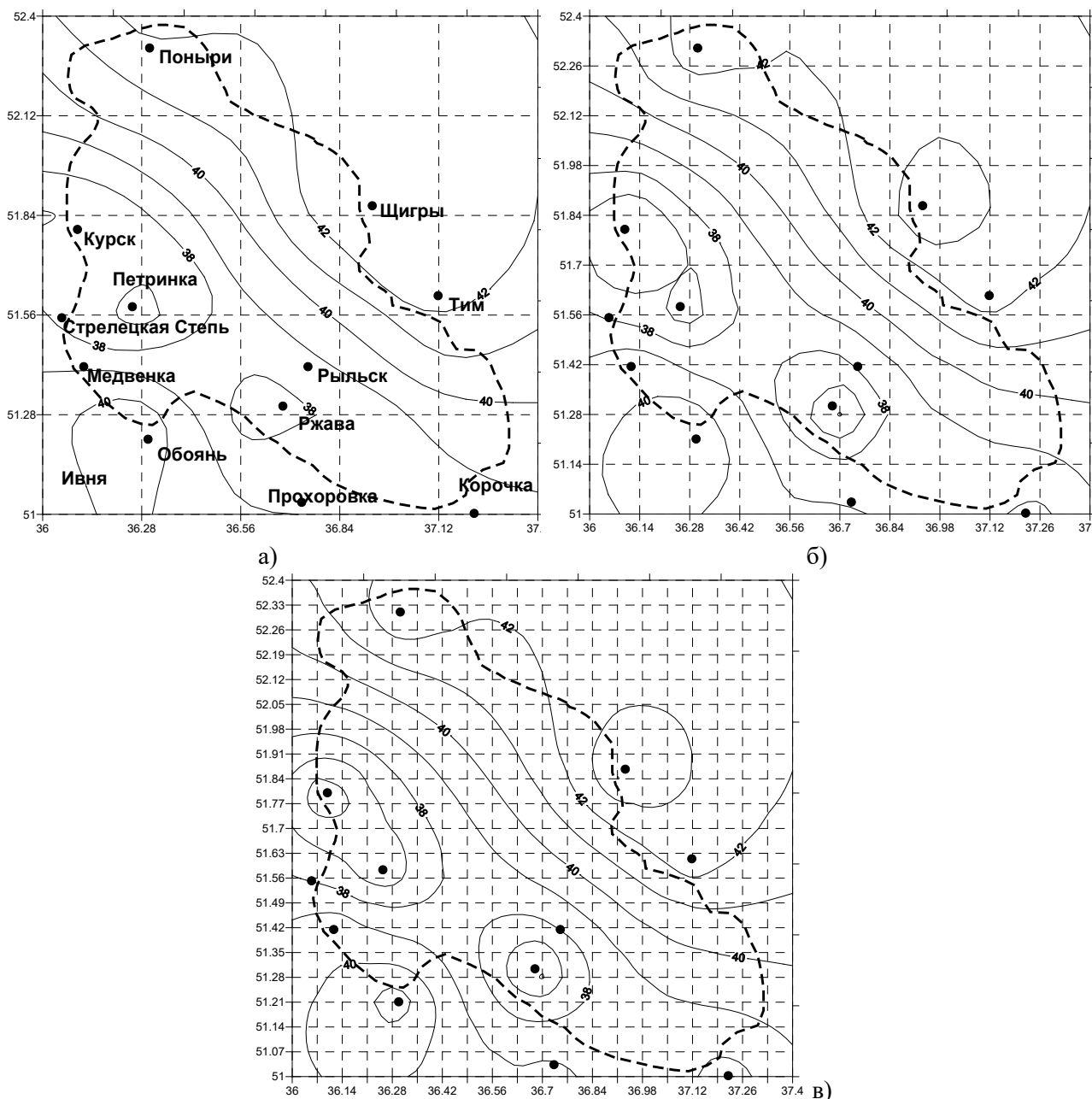


Рисунок 2. Распределение фактических глубин снега на 1 марта 1970 года, построенное методом стандартного крайгинга, при разной дискретизации территории:

а – ячейки 800 км²; б – 200 км²; в – 50 км² (пунктиром показаны границы водосбора реки Сейм).

Figure 2. Spatial distribution of snow depth observed on March 1, 1970 and constructed by the ordinary kriging with different discretization of the territory: а – 800 km² cell area; б – 200 km² cell area; в – 50 km² cell area (the dotted line shows the boundaries of the catchment area of the Seim River).

При этом учитывается как крупномасштабная изменчивость снежного покрова (выражаемая в изменениях m_i от ячейки к ячейке), так и мелкомасштабная изменчивость σ_i внутри ячейки. Динамика характеристик снежного покрова во время снеготаяния внутри каждой ячейки рассчитывается по модели

снеготаяния для нескольких участков внутри ячейки, покрытых снегом разной глубины H_s , при этом площади участков задаются по кривой логнормального распределения H_s . (Нами показано, что при величинах коэффициента вариации глубины снега, не превышающих 1,0–1,5, оказывается достаточным разбиения

кривой на 5 участков). В результате применения описанной процедуры определяется средняя по площади каждой ячейки интенсивность снеготаяния с учетом доли площади, покрытой перед началом снеготаяния снегом заданной глубины.

Описанная процедура была применена для оценки чувствительности рассчитанных характеристик снеготаяния на площади к детальности дискретизации этой площади. Территория, расположенная в Центрально-Черноземной области России и включающая бассейн реки Сейм, разбивалась прямоугольной сеткой тремя способами: 5x5, 10x10 и 20x20 ячеек с размерами ячеек порядка 800, 200 и 50 км² соответственно. Как было сказано выше, фактические значения высоты снежного покрова, интерполированные в центры получившихся ячеек для каждого варианта разбиения, интерпретировались как средняя высота снежного покрова внутри ячейки. Оказалось, что общая картина начального распределения глубины снега по территории, построенного по полученным средним значениям, почти не различается при разбиении территории сеткой 10x10 или 20x20 ячеек. При более грубом разрешении (сетка 5x5) это распределение отличается заметнее, хотя в целом, общая картина остается похожей на полученную при более детальной сетке. На рисунке 2а – 2в в качестве иллюстрации этого сходства приведены карты начального распределения глубины снега, построенные методом стандартного крайгинга, для 3-х способов разбиения территории для 1970 года – года с наибольшими снегозапасами за рассматриваемый период. Стандартное отклонение σ_i начальной высоты снежного покрова внутри каждой i -й ячейки, рассчитанное по формуле (13), уменьшается по

сравнению со стандартным отклонением σ_f глубины снега на всем бассейне на 20, 28 и 34%, при задаваемом уменьшении площади ячеек. По полученному распределению начальной глубины снега для каждой ячейки сетки, попавшей на водосбор реки Сейм, моделировалась динамика снежного покрова с 1 марта до схода снега на всем водосборе для периода с 1967 по 1976 год. По результатам моделирования оценивалась чувствительность рассчитанных характеристик снеготаяния к изменению размера ячеек используемой сетки. Сравнялся ход глубины снега, рассчитанный для разного разрешения сетки, а также ход водоотдачи снежного покрова. Для всех 10 лет оказалось, что рассчитанное среднее по водосбору снеготаяние очень слабо реагирует на изменение разрешения используемой сетки. В качестве примера на рисунках 3, 4 показан ход искомых характеристик для многоснежного и малоснежного годов (1970 и 1975 соответственно).

Как видно из верхних рисунков, различия графиков хода средней на водосборе глубины снега немного заметны только для малоснежного года, а графики хода средней водоотдачи, рассчитанной при разном разрешении сетки, сливаются. Сравнения производились также по результатам расчета в пределах отдельных участков водосборной площади: на нижних графиках показан расчет при разном разрешении сетки тех же характеристик, осредненных по площади ячейки, в границы которой попадает метеостанция Поныри. Чувствительность характеристик снеготаяния, осредненных по территории отдельной ячейки, к изменению ее площади оказалась несколько выше, чем для характеристик, осредненных по всему водосбору, однако, по-прежнему, очень незначительной.

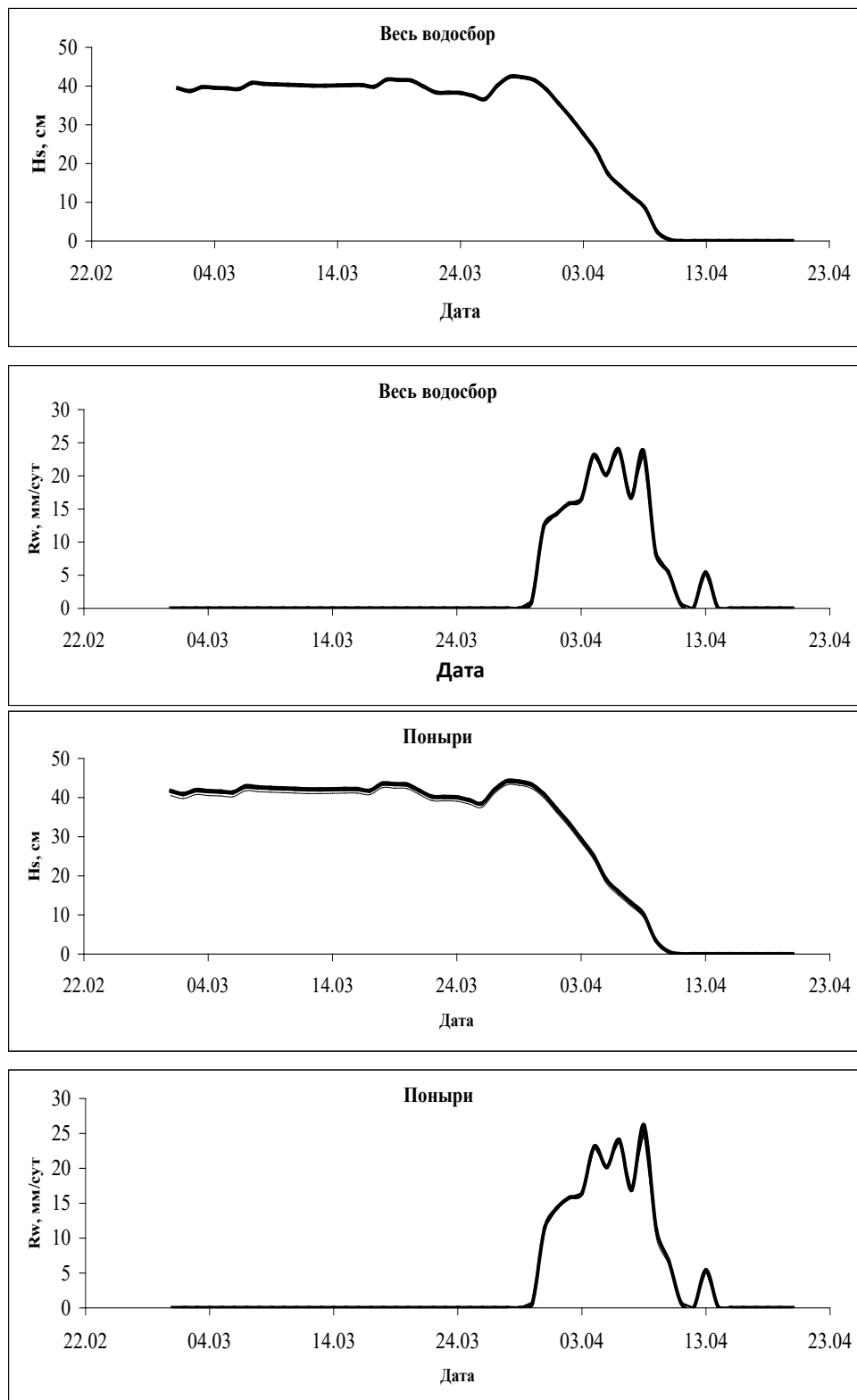


Рисунок 3. Рассчитанные глубина снега и водоотдача снежного покрова весной 1970 года, осредненные для всего водосбора и по ячейке сетки около метеорологической станции Поньри (жирная линия – расчет при ячейках 7x7 км; тонкая – 14x14 км; пунктир – 28x28 км).

Figure 3. Simulated snow depth and snow melt rate, averaged for the entire catchment area and over a grid cell near meteorological station Ponyri in the spring of 1970 (bold line – simulation with 7x7 km cells; thin line – 14x14 km; dotted line – 28x28 km).

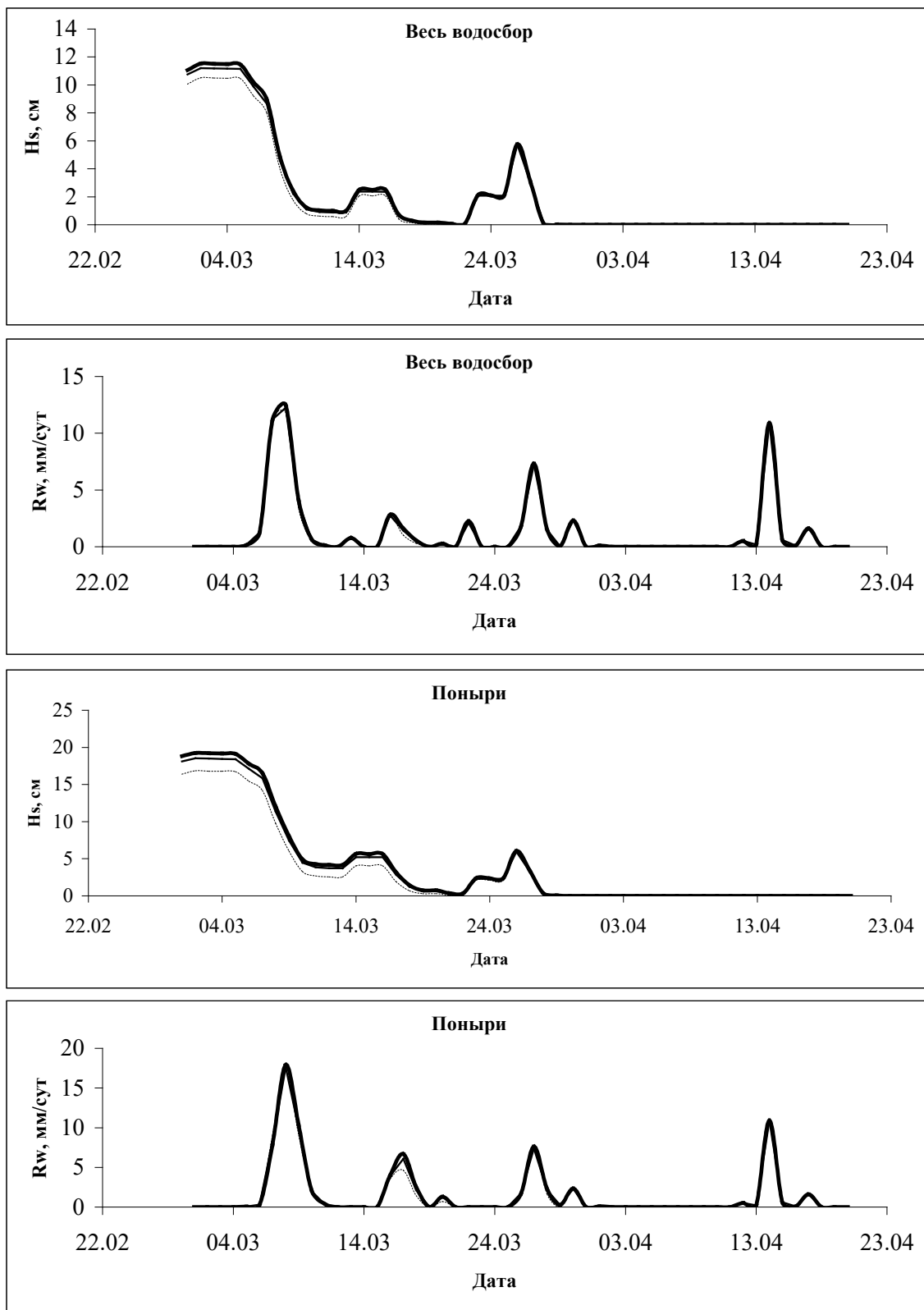


Рисунок 4. Рассчитанные глубина снега и водоотдача снежного покрова весной 1975 года, осредненные для всего водосбора и по ячейке сетки около метеорологической станции Поньри (жирная линия – расчет при ячейках 7x7 км; тонкая – 14x14 км; пунктир – 28x28 км).

Figure 4. Simulated snow depth and snow melt rate, averaged for the entire catchment area and over a grid cell near meteorological station Ponyri in the spring of 1975 (bold line – simulation with 7x7 km cells; thin line – 14x14 km; dotted line – 28x28 km).

Таким образом, рассчитанное снеготаяние на всем водосборе реки Сейм и на отдельных его участках оказалось малочувствительно к изменению плотности пространственной сетки. Другими словами, расчет снеготаяния по грубой сетке с более высокой подсеточной изменчивостью глубины снега мало отличается от расчета по детальной сетке, но с меньшей подсеточной изменчивостью – учет подсеточной изменчивости компенсирует погрешности, вызванные недостаточной детальностью сетки. Для расчетов гидрографа талого стока в замыкающем створе полученный результат означает возможность выбора, при описании снеготаяния, более грубой сетки, чем схематизация водосборной площади, используемая для расчетов склонового стока в

Литература

- Гандин Л.С., Каган Р.Л. О точности определения средней высоты снежного покрова по дискретным данным // Методика метеорологических наблюдений (снегомерные наблюдения) / Труды Главной геофизической обсерватории им. А.И.Воейкова. Вып. 130. Л.: Гидрометеиздат, 1962. С. 3–10.
- Гельфан А.Н., Морейдо В.М. Описание макромасштабной структуры поля снежного покрова равнинной территории с помощью динамико-стохастической модели его формирования // Лед и Снег, 2015. Т. 55. №4. С. 61–72. DOI: [10.15356/2076-6734-2015-4-61-72](https://doi.org/10.15356/2076-6734-2015-4-61-72).
- Каган Р.Л. Осреднение метеорологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 213 с.
- Кучмент Л.С., Гельфан А.Н. Статистическое самоподобие пространственных изменений снегозапасов и его применение при моделировании талого стока // Метеорология и гидрология. 1997. №6. С. 80–90.
- Кучмент Л.С., Гельфан А.Н., Демидов В.Н. Модель формирования стока на водосборах зоны многолетней мерзлоты (на примере верхней Колымы) // Водные ресурсы. 2000. Т. 27. № 4. С. 435–444.
- Лайхтман Д.Л., Каган Р.Л. Некоторые вопросы рационализации снегоъемок // Методика

моделях с распределенными параметрами. Этот вывод, естественно, относится к рассмотренной здесь схеме описания пространственной изменчивости снеготаяния в зависимости только от начального распределения снежного покрова и пространственного распределения метеорологических факторов в период снеготаяния. Если в модели учитывать например влияние экспозиции склонов на снеготаяние, то требуемая в этом случае сетка должна отражать характер рельефа территории и может оказаться более детальной.

Благодарности

Исследования выполнены в рамках Государственного задания Института водных проблем РАН (тема №FMWZ-2022-0001).

References

- Blöschl G., Grayson R. Spatial observations and interpolation. In Grayson R., Blöschl G. (Eds.) *Spatial Pattern in Catchment Hydrology: Observations and Modeling*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, pp. 17–50.
- Blöschl G., Gutknecht D., Kirnbauer R. Distributed Snowmelt Simulations in an Alpine Catchment: 2. Parameter Study and Model Predictions. *Water Resources Research*, 1991, vol. 27, iss. 12, pp. 3181–3188. DOI: [10.1029/91WR02251](https://doi.org/10.1029/91WR02251).
- Blöschl G., Kirnbauer R. An analysis of snow cover patterns in a small alpine catchment. *Hydrological Processes*, 1992, vol. 6, iss. 1, pp. 99–109. DOI: [10.1002/hyp.3360060109](https://doi.org/10.1002/hyp.3360060109).
- Blöschl G., Sivapalan M. Scale issues in hydrological modelling: a review. *Hydrological Processes*, 1995, vol. 9, iss. 3–4, pp. 251–290. DOI: [10.1002/hyp.3360090305](https://doi.org/10.1002/hyp.3360090305).
- Bruno R., Raspa G. Geostatistical characterization of fractal models of surfaces. In Armstrong M. (Ed.) *Proceedings of the Third International Geostatistics Congress (September 5–9, 1988, Avignon, France)*. Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 77–89. DOI: [10.1007/978-94-015-6844-9_5](https://doi.org/10.1007/978-94-015-6844-9_5).
- Burrough P.A. Multiscale sources of spatial variation of in soil. I: The application of fractal concept to nested levels of soil variation. *Journal of*

метеорологических наблюдений / Труды Главной геофизической обсерватории им. А.И.Воейкова. Вып. 108. Л.: Гидрометеиздат, 1960. С. 3–18.

Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики / Перевод Ю.В. Рожиной. М.: Мир, 1968. 407 с.

Мотовилов Ю.Г. Моделирование снежного покрова и снеготаяния // Моделирование гидрологического цикла речных водосборов / Под ред. Л.С. Кучмент, Е.Л. Музылев. М.: Изд-во НГК РАН, 1993. С. 9–37.

Чемеренко Е.П. Статистические характеристики поля высоты снежного покрова // Численные модели прогноза стока / Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра СССР. Вып. 25. Л.: Гидрометеиздат, 1968. С. 63–74.

Чемеренко Е.П. Сравнение различных методов интерполяции для поля высоты снежного покрова // Расчет и прогноз стока рек / Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра СССР. Вып. 72. Л.: Гидрометеиздат, 1971. С. 63–74.

Чемеренко Е.П. Об ошибках осреднения по площади данных о водосодержании снежного покрова // Расчет и прогноз стока рек / Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра СССР. Вып. 113. Л.: Гидрометеиздат, 1973. С. 65–75.

Шутов В.А. Распределение запасов воды в снежном покрове на водосборах лесной зоны // Метеорология и гидрология. 1994. № 9. С. 85–92.

Blöschl G., Grayson R. Spatial observations and interpolation // Spatial Pattern in Catchment Hydrology: Observations and Modeling / Eds. R. Grayson, G. Blöschl. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Pp. 17–50.

Blöschl G., Gutknecht D., Kirnbauer R. Distributed Snowmelt Simulations in an Alpine Catchment: 2. Parameter Study and Model Predictions // Water Resources Research. 1991. Vol. 27. Iss. 12. Pp. 3181–3188. DOI: [10.1029/91WR02251](https://doi.org/10.1029/91WR02251).

Blöschl G., Kirnbauer R. An analysis of snow cover patterns in a small alpine catchment // Hydrological

Soil Science, 1983, vol. 34, iss. 3, pp. 577–597. DOI: [10.1111/J.1365-2389.1983.TB01057.X](https://doi.org/10.1111/J.1365-2389.1983.TB01057.X).

Chemerenko E.P. Statisticheskie kharakteristiki polya vysoty snezhnogo pokrova [Statistical characteristics of the snow depth field]. *Trudy Gidrometeorologicheskii nauchno-issledovatel'skii tsentr SSSR. Vypusk. 25. Chislennyye modeli prognoza stoka* [Proceedings of the Hydrometeorological Research Center of the USSR. Issue 25. Numerical models of runoff forecast]. Leningrad, Publ. of Gidrometeoizdat, 1968, pp. 63–74. (In Russian).

Chemerenko E.P. Sravnenie razlichnykh metodov interpolatsii dlya polya vysoty snezhnogo pokrova [Comparison of various interpolation methods for the field of snow depth] *Trudy Gidrometeorologicheskii nauchno-issledovatel'skii tsentr SSSR. Vypusk 72. Raschet i prognoz stoka rek* [Proceedings of the Hydrometeorological Research Center of the USSR. Issue 72. Calculation and forecast of river runoff]. Leningrad, Publ. Gidrometeoizdat, 1971, pp. 63–74. (In Russian).

Chemerenko E.P. Ob oshibkakh osredneniya po ploshchadi dannykh o vodosoderzhanii snezhnogo pokrova [On the errors of averaging over the area of data on the water content of the snow cover]. *Trudy Gidrometeorologicheskii nauchno-issledovatel'skii tsentr SSSR. Vypusk 113. Raschet i prognoz stoka rek* [Proceedings of the Hydrometeorological Research Center of the USSR. Issue 72. Calculation and forecast of river runoff]. Leningrad, Publ. Gidrometeoizdat, 1973, pp. 65–75. (In Russian).

Cline D.W., Bales R.C., Dozier J. Estimating the spatial distribution of snow in mountain basins using remote sensing and energy balance modeling. *Water Resources Research*, 1998, vol. 34, iss. 5, pp. 1275–1285. DOI: [10.1029/97WR03755](https://doi.org/10.1029/97WR03755).

Gandin L.S., Kagan R.L. O tochnosti opredeleniya srednei vysoty snezhnogo pokrova po diskretnym dannym [On the accuracy of determining the average height of snow cover from discrete data]. In: *Metodika meteorologicheskikh nablyudenii (snegomernyye nablyudeniya)* [Methods of meteorological observations (snow measurements)]. Leningrad, Publ. Gidrometeoizdat, 1962, pp. 3–10. (In Russian).

Processes. 1992. Vol. 6. Iss. 1. Pp. 99–109. DOI: [10.1002/hyp.3360060109](https://doi.org/10.1002/hyp.3360060109).

Blöschl G., Sivapalan M. Scale issues in hydrological modelling: a review // *Hydrological Processes*. 1995. Vol. 9. Iss. 3–4. Pp. 251–290. DOI: [10.1002/hyp.3360090305](https://doi.org/10.1002/hyp.3360090305).

Bruno R., Raspa G. Geostatistical characterization of fractal models of surfaces // *Proceedings of the Third International Geostatistics Congress* (September 5–9, 1988, Avignon, France) / Armstrong M. (Ed.) Kluwer Academic Publishers, 1989. Pp. 77–89. DOI: [10.1007/978-94-015-6844-9_5](https://doi.org/10.1007/978-94-015-6844-9_5).

Burrough P.A. Multiscale sources of spatial variation of in soil. I: The application of fractal concept to nested levels of soil variation // *Journal of Soil Science*. 1983. Vol. 34. Iss. 3. Pp. 577–597. DOI: [10.1111/J.1365-2389.1983.TB01057.X](https://doi.org/10.1111/J.1365-2389.1983.TB01057.X).

Cline D.W., Bales R.C., Dozier J. Estimating the spatial distribution of snow in mountain basins using remote sensing and energy balance modeling // *Water Resources Research*. 1998. Vol. 34. Iss. 5. Pp. 1275–1285. DOI: [10.1029/97WR03755](https://doi.org/10.1029/97WR03755).

Georgakakos A.P., Kitanidis P., Loaiciga H., Rouhani S., Olea R. Yates S. Review of Geostatistics in Geohydrology. I: Basic Concepts // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1990. Vol. 116. Iss. 5. Pp.612–658. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1990\)116:5\(612\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1990)116:5(612)).

Gottschalk L., Jutman T. Statistical analysis of snow survey data // *SMHI Report SMHI Rapporten «Hydrologi och Oceanografi» No. RHO-20*. Norrköping: Sveriges meteorologiska och hydrologiska institut, 1979. 41 p.

Journel A.G., Huijbregts C.J. *Mining Geostatistics*. London: Academic Press, 1978. 600 p.

Killingtveit Å, Sand K. On areal distribution of snowcover in a mountainous area // *Proceedings of the Northern Hydrology Symposium (10–12 July 1990, Saskatoon, Saskatchewan) «Northern hydrology: selected perspectives»* / Prowse T.D., Ommanney C.S.L. (eds.). Saskatoon: National Hydrology Research Centre, 1991, pp. 189–204.

Kuchment L.S., Gelfan A.N. Statistical self-similarity of spatial variations of snow cover: verification of the hypothesis and application in the

Gelfan A.N., Moreydo V.M. Opisanie makromasshtabnoi struktury polya snezhnogo pokrova ravninnoi territorii s pomoshch'yu dinamiko-stokhasticheskoi modeli ego formirovaniya [Describing macro-scale structure of the snow cover by a dynamic-stochastic model]. *Led i sneg [Ice and snow (Russia)]*, 2015, vol.55, iss. 4, pp. 61–72. DOI: [10.15356/2076-6734-2015-4-61-72](https://doi.org/10.15356/2076-6734-2015-4-61-72). (In Russian; abstract in English).

Georgakakos A.P., Kitanidis P., Loaiciga H., Rouhani S., Olea R. Yates S. Review of Geostatistics in Geohydrology. I: Basic Concepts. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1990, vol. 116, iss. 5, pp.612–658. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1990\)116:5\(612\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1990)116:5(612)).

Gottschalk L., Jutman T. Statistical analysis of snow survey data. *SMHI Report SMHI Rapporten «Hydrologi och Oceanografi» No. RHO-20*. Norrköping, Sveriges meteorologiska och hydrologiska institut, 1979. 41 p.

Journel A.G., Huijbregts C.J. *Mining Geostatistics*. London, Publ. Academic Press, 1978. 600 p.

Kagan R.L. *Osrednenie meteorologicheskikh polei [Averaging of meteorological fields]*. Leningrad, Publ. Gidrometeoizdat, 1979. 213 p. (In Russian; abstract in English).

Killingtveit Å, Sand K. On areal distribution of snowcover in a mountainous area. In: Prowse T.D., Ommanney C.S.L. (eds.) *Proceedings of the Northern Hydrology Symposium (10–12 July 1990, Saskatoon, Saskatchewan) «Northern hydrology: selected perspectives»*. Saskatoon, Publ. National Hydrology Research Centre, 1991, pp. 189–204.

Kuchment L.S., Gelfan A.N. Statistical self-similarity of spatial snow accumulation variations and its application to snowmelt runoff models. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1997, iss. 7, pp. 53–60. (Russ. ed.: Kuchment L.S., Gelfan A.N. Statisticheskoe samopodobie prostranstvennykh izmenenii snegozapasov i ego primenenie pri modelirovanii talogo stoka. *Meteorologiya i gidrologiya*, 1997, iss. 6, pp. 80–90).

Kuchment L.S., Gelfan A.N. Statistical self-similarity of spatial variations of snow cover: verification of the hypothesis and application in the snowmelt runoff generation models. *Hydrological*

snowmelt runoff generation models // *Hydrological Processes*. 2001. Vol. 15. Iss. 18. Pp. 3343–3355. DOI: [10.1002/HYP.1032](https://doi.org/10.1002/HYP.1032).

Kuchment L.S., Gelfan A.N. Estimation of extreme flood characteristics using physically based models of runoff generation and stochastic meteorological inputs // *Water International*. 2002. Vol. 27. Iss. 1. Pp. 77–86. DOI: [10.1080/02508060208686980](https://doi.org/10.1080/02508060208686980).

Lovejoy S, Mandelbrot B.B. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 1985. Vol. 37. Iss. 3. Pp. 209–232. DOI: [10.3402/TELLUSA.V37I3.11668](https://doi.org/10.3402/TELLUSA.V37I3.11668).

Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982. 460 p.

Mark D.M., Aronson P.B. Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: an empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping // *Journal of the International Association for Mathematical Geology*. 1984. Vol. 16. Iss. 7. Pp. 671–683. DOI: [10.1007/BF01033029](https://doi.org/10.1007/BF01033029).

Meijerink A.M.J., De Brouwer H.A.M., Mannaerts C.M., Valenzuela C.R. Introduction to the use of geographic information systems for practical hydrology // UNESCO, International Hydrology Programme and ITC publication No. 23. Enschede: ITC, 1994, 243 pp.

Pomeroy J.W., Gray D.M. Snowcover accumulation, relocation and management // NHRI. Science Report No. 7. Saskatoon: National Hydrology Research Centre, 1995. 135 p.

Rozenthal W., Dozier J. Automated mapping of Montane snow cover at subpixel resolution from the Landsat Thematic Mapper // *Water Resources Research*. 1996. Vol. 32. Iss. 1. Pp. 115–130. DOI: [10.1029/95WR02718](https://doi.org/10.1029/95WR02718).

Shook K., Gray D.M. Small-scale spatial structure of shallow snowcovers // *Hydrological Processes*. 1996. Vol. 10. Iss. 10. Pp. 1283–1292. DOI: [10.1002/\(SICI\)1099-1085\(199610\)10:10<1283::AID-HYP460>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1085(199610)10:10<1283::AID-HYP460>3.0.CO;2-M).

Processes, 2001, vol. 15, iss. 18, pp. 3343–3355. DOI: [10.1002/HYP.1032](https://doi.org/10.1002/HYP.1032).

Kuchment L.S., Gelfan A.N. Estimation of extreme flood characteristics using physically based models of runoff generation and stochastic meteorological inputs. *Water International*, 2002, vol. 27, iss. 1, pp. 77–86. DOI: [10.1080/02508060208686980](https://doi.org/10.1080/02508060208686980).

Kuchment L.S., Gel'fan A.N., Demidov V.N. A model of runoff formation on watersheds in the permafrost zone: case study of the upper Kolyma river. *Water Resources*, 2020, vol. 27, iss. 4, pp. 392–400. (Russ. ed.: *Kuchment L.S., Gel'fan A.N., Demidov V.N.* Model' formirovaniya stoka na vodosborakh zony mnogoletnei merzloty (na primere verkhnei Kolymy). *Vodnye resursy*, 2000, vol. 27, iss. 4, pp. 435–444).

Laikhtman D.L., Kagan R.L. Nekotorye voprosy ratsionalizatsii snegos'emok [Some questions of rationalization of snow surveys]. In: *Metodika meteorologicheskikh nablyudenii [Methods of meteorological observations]*. Leningrad, Publ. Gidrometeoizdat, 1960, pp. 3–18. (In Russian).

Lovejoy S, Mandelbrot B.B. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 1985, vol. 37, iss. 3, pp. 209–232. DOI: [10.3402/TELLUSA.V37I3.11668](https://doi.org/10.3402/TELLUSA.V37I3.11668).

Mandelbrot B.B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco, Publ. Freeman, 1982. 460 p.

Mark D.M., Aronson P.B. Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: an empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 1984, vol. 16, iss. 7, pp. 671–683. DOI: [10.1007/BF01033029](https://doi.org/10.1007/BF01033029).

Matheron G. *Traité de géostatistique appliquée*. Paris, Éditions Technip, 1962. 650 p. (Russ. ed.: *Materon Zh.* Osnovy prikladnoi geostatistiki. Moscow, Mir Publ., 1968. 407 p).

Meijerink A.M.J., De Brouwer H.A.M., Mannaerts C.M., Valenzuela C.R. Introduction to the use of geographic information systems for practical hydrology. UNESCO, *International Hydrology*

Programme and ITC publication No. 23. Enschede, Publ. ITC, 1994, 243 pp.

Motovilov Yu.G. Modelirovanie snezhnogo pokrova i snegotayaniya [Simulation of snow cover and snow melting]. In: L.S. Kuchment, E.L. Muzylev (eds.) *Modelirovanie gidrologicheskogo tsikla rechnykh vodosborov* [Modeling of the hydrological cycle of river catchments]. Moscow, Publ. of NGK RAN, 1993, pp. 9–37. (In Russian).

Pomeroy J.W., Gray D.M. Snowcover accumulation, relocation and management. *NHRI Science Report No. 7*. Saskatoon, Publ. National Hydrology Research Centre, 1995. 135 p.

Rozenthal W., Dozier J. Automated mapping of Montane snow cover at subpixel resolution from the Landsat Thematic Mapper. *Water Resources Research*, 1996, vol. 32, iss. 1, pp. 115–130. DOI: [10.1029/95WR02718](https://doi.org/10.1029/95WR02718).

Shook K., Gray D.M. Small-scale spatial structure of shallow snowcovers. *Hydrological Processes*, 1996, vol. 10, iss. 10, pp. 1283–1292. DOI: [10.1002/\(SICI\)1099-1085\(199610\)10:10<1283::AID-HYP460>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1085(199610)10:10<1283::AID-HYP460>3.0.CO;2-M).

Shutov V.A. Raspredelenie zapasov vody v snezhnom pokrove na vodosborakh lesnoi zony [Distribution of water reserves in the snow cover on the catchments of the forest zone]. *Meteorologiya i gidrologiya* [Russian Meteorology and hydrology], 1994, iss. 9, pp. 85–92. (In Russian).